|  |
| --- |
| МИНИСТЕР СТВ О НАУКИ И В ЫСШЕГО ОБР АЗ ОВ АНИЯ Р ОССИЙСКОЙ ФЕДЕР АЦИ И  ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  « Н а ц и о н а л ь н ы й и с с л е д о в а т е л ь с к и й я д е р н ы й у н и в е р с и т е т « М И Ф И » |
| **Обнинский институт атомной энергетики –**  филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования  «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»  **(ИАТЭ НИЯУ МИФИ)** |

# ИНСТИТУТ ОБЩЕЙ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ПОДГОТОВКИ (О)

**Кафедра Высшей математики**

Одобрено на заседании

Ученого совета ИАТЭ НИЯУ МИФИ Протокол от 24.04.2023 № 23.4

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

для преподавателя по дисциплине

|  |
| --- |
| **ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА** |
| *название дисциплины* |
| для студентов направления подготовки |
| 04.03.02 Химия, физика и механика материалов |
| *код и название направления подготовки* |
| Химические и фармакологические технологии |

Форма обучения: очная

# г. Обнинск 2023 г.

**ВВЕДЕНИЕ**

Методические рекомендации для преподавателей по дисциплине «Ли- нейная алгебра» представляют собой комплекс рекомендаций и разъяснений, позволяющих преподавателю оптимальным образом организовать процесс обучения по данной дисциплине.

Цель дисциплины –

* теоретическая подготовка и получение практических навыков по линей- ной алгебре для успешного усвоения фундаментальных, общетехнических и специальных дисциплин учебного плана, а также для возможности изу- чения специальной литературы, в случае необходимости самостоятельно- го углубления математических знаний после окончания ВУЗа;
* развить логическое мышление студентов, привить потребность теоретиче- ского обоснования различных явлений.

Задачи дисциплины:

* создание у студентов достаточно широкой подготовки в области матема- тики и воспитание достаточно высокой математической культуры;
* сформировать навыки использования математических методов и основ математического моделирования в практической деятельности;
* привить навыки самостоятельной работы с литературой по математике и ее приложениям;

Дисциплина «Линейная алгебра» реализуется в рамках обязательной части и относится к общепрофессиональному модулю.

Дисциплина изучается на 1 курсе во 2-м семестре.

Основными видами учебной работы по данной дисциплине являются лекции, практические занятия, самостоятельная работа обучающихся. Для успешного освоения дисциплины студенты необходимо изучить лекционный материал и рекомендуемую литературу, отработать изученный материал на практических занятиях, выполнить задания для самостоятельной работы.

# 1 Лекции

Лекции являются одним из основных методов обучения по дисциплине

«Линейная алгебра». Главной задачей каждой лекции является раскрытие сущности темы и анализ ее основных положений. Рекомендуется на первой лекции довести до внимания студентов структуру дисциплины и его разделы, а в дальнейшем указывать начало каждого раздела (модуля), суть и его зада- чи, а, закончив изложение, подводить итог по этому разделу, чтобы связать его со следующим.

Содержание лекций определяется рабочей программой дисциплины и представлено в таблице.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Неделя** | **Наименование раз- дела /темы дисцип- лины** | **Содержание** |
| 1-4. | **Матрицы, определители и системы линейных уравнений** | |
| 1-2 | Матрицы и определи- тели | Матрицы, действия над матрицами.  Определитель квадратной матрицы n–го порядка. Свойства определителей. Минор. Алгебраическое дополнение. Разло- жения определителя по строке (столбцу). Методы вычисле- ния определителей. Обратная матрица. Условия существо- вания. Нахождение обратной матрицы. |
| 3-4. | Системы линейных уравнений | Система из n линейных уравнений с *n* неизвестными. Мат- ричная запись. Правило Крамера. Ранг матрицы. Базисный минор. Теорема о базисном миноре. Элементарные преобра- зования и ранг матрицы. Системы линейных уравнений.  Теорема Кронекера Капелли. Метод Гаусса. Однородная система, фундаментальная совокупность решений. Общее решение неоднородной системы. |
| 5-9 | **Линейные пространства и подпространства, базис, координаты, линейные опе-**  **раторы** | |
| 5-6. | Линейные пространст- ва, размерность | Линейные пространства. Линейная зависимость и независи- мость элементов линейного пространства. Базис. Координа- ты вектора в базисе. Размерность. Изоморфизм линейных  пространств. Преобразование координат вектора при пере- ходе к новому базису. Подпространства линейного про- странства. Линейная оболочка векторов. Теорема о размер- ности линейной оболочки. Сумма и пересечение подпро- странств, теорема о связи их размерностей. Прямая сумма  подпространств. |
| 7-9. | Операторы | Линейный оператор. Матричная запись оператора. Измене- ние матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. Действия над линейными операторами. Обратимость операторов. Матрица обратного оператора. Ядро и образ линейного оператора. Ранг и дефект.  Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Характеристический многочлен оператора. Усло- вия существования базиса из собственных векторов. |
| 10-13. | **Евклидовы пространства** | |
| 10-12 | Евклидовы простран- | Евклидово пространство. Неравенство Коши-Буняковского. |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | ства | Неравенство треугольника. Ортогональные элементы. Ор- тонормированный базис. Процесс ортогонализации Грама- Шмидта. Определители Грама и их приложения. Многомер-  ная евклидова геометрия. Ортогональное дополнение. |
| 12-13 | Операторы самосо- пряженный и ортого- нальный | Сопряженный, самосопряженный, унитарный и ортогональ- ный операторы. Приведение самосопряженного оператора к диагональному виду в ортонормированном базисе. |
| 14-16 | **Квадратичные формы** | |
| 14-16 | Приведение формы к каноническому виду | Билинейные и квадратичные формы в вещественном линей- ном пространстве. Канонический и нормальный вид квадра- тичной формы. Метод Лагранжа. Закон инерции. Критерий Сильвестра. Приведение квадратичной формы к канониче- скому виду ортогональным преобразованием.  Неоднородный многочлен второй степени от *n* переменных. Приведение уравнения поверхности второго порядка к кано- ническом виду. |

Для эффективного проведения лекционного занятия рекомендуется со- блюдать последовательность ее основных этапов:

1. формулировку темы лекции;
2. указание основных изучаемых разделов или вопросов и предпола- гаемых затрат времени на их изложение;
3. изложение вводной части;
4. изложение основной части лекции;
5. краткие выводы по каждому из вопросов;
6. заключение;
7. рекомендации литературных источников по излагаемым вопросам. Дадим краткую характеристику каждого из лекционных этапов.

Начальный этап каждого лекционного занятия – оглашение основной темы лекции с краткой аннотацией предлагаемых для изучения вопросов. Преподаватель должен сообщить о примерном плане проведения лекции и предполагаемом распределении бюджета времени. Если очередное занятие является продолжением предыдущей лекции, необходимо кратко сформули- ровать полученные ранее результаты, необходимые для понимания и усвое- ния изучаемых вопросов.

Во вводной части достаточно кратко характеризуется место и значение данной темы в курсе, дается обзор важнейших источников и формулируются основные вопросы или задачи, решение которых необходимо для создания стройной системы знаний в данной предметной области. В этой части лекции демонстрируются основные педагогические методы, которые будут исполь- зоваться при изложении материала и устанавливается контакт с аудиторией.

Основная часть лекции имеет своей целью раскрытие содержания ос- новных вопросов или разделов и определяется логической структурой плана лекции. При этом используются основные педагогические способы изложе- ния материала: описание-характеристика, повествование, объяснение и др. Преподаватель должен также умело использовать эффективные методиче-

ские приемы изложения материала – анализ, обобщение, индукцию, дедук- цию, противопоставления, сравнения и т.д., обеспечивающие достаточно вы- сокий уровень качества учебного процесса.

В заключительной части лекции проводят обобщение наиболее важных и существенных вопросов, делаются выводы, формулируются задачи для са- мостоятельной работы слушателей и указывается рекомендуемая литература. Оставшееся время используют для ответов на вопросы, задаваемые слушате- лями, и для возможной дискуссии о содержании лекции.

Содержание лекционного материала должно строго соответствовать содержательной части, утвержденной рабочей учебной программы дисцип- лины и соответствовать основным дидактическим принципам, которые обес- печивают соответствие излагаемого материала научно-методическим осно- вам экономической деятельности. Основными из них являются целостность, научность, доступность, систематичность и наглядность.

Целостность лекции обеспечивается созданием единой ее структуры, основанной на взаимосвязи задач занятия и содержания материала, предна- значенного для усвоения студентами.

Научность лекции предполагает соответствие материала основным по- ложениям современной науки, абсолютное преобладание объективного фак- тора и доказательность выдвигаемых положений. Для научно обоснованной лекции характерны ясность, логичность, аргументированность, точность и сжатость.

Принцип доступности лекции предполагает, что содержание учебного материала должно быть понятным, а объем этого материала посильным для всех студентов. Это означает, что степень сложности лекционного материала должна соответствовать уровню развития и имеющемуся запасу знаний и представлений студентов.

Систематичность лекционного материала определяется взаимосвязью изучаемого материала с ранее изученным, постепенным повышением слож- ности рассматриваемых вопросов, взаимосвязью частей изучаемого материа- ла, обобщением изученного материала, стройностью изложения материала по содержанию и внешней форме его подачи, рубрикацией курса, темы, вопроса и единообразием структуры построения материала.

Принцип наглядности содержания лекции требует использования при чтении лекции визуальных носителей информации в виде презентаций, по- скольку основной поток информации в учебном процессе воспринимается обучаемым зрительно. Демонстрационный материал во всех случаях должен играть подчиненную роль и не подменять содержания лекции. В каждый мо- мент лекции необходимо демонстрировать только тот наглядный материал, который иллюстрирует излагаемые положения.

При проведении лекционных занятий по дисциплине используются следующие виды лекций: информационные, проблемные, лекции- визуализации, лекции с опорным конспектированием.

Основным признаком информационной лекции является простой спо- соб передачи готовых знаний учащимся через монологическую форму обще-

ния.

В отличие от информационной лекции, в проблемной лекции, лекции-

визуализации происходит активное освоение содержание обучения с вклю- чением механизмов творческого осмысления. В этом процессе учащиеся про- являют собственную активность в контексте диалогического взаимодействия и общения в ходе лекции.

Лекции проблемного характера отличает то, что процесс познания сту- дентов приближается к поисковой, исследовательской деятельности. При этом обеспечивается достижение трех основных целей: усвоение студентами теоретических знаний, развитие теоретического мышления и формирование познавательного интереса к содержанию учебного предмета и профессио- нальной мотивации будущего специалиста. На такой лекции новое знание вводится через проблемность вопроса, задачи или ситуации. При этом про- цесс познания студентов в сотрудничестве и диалоге с преподавателем при- ближается к исследовательской деятельности. Содержание проблемы рас- крывается путем организации поиска ее решения или суммирования и анали- за традиционных и современных точек зрения.

Другая форма лекции – лекция-визуализация – является результатом поиска новых возможностей реализации известного в дидактике принципа наглядности, содержание которого меняется под влиянием данных психоло- го-педагогической науки, форм и методов активного обучения. Лекция- визуализация представляет собой визуальную форму подачи лекционного материала средствами компьютерной техники или аудио- и видеотехники (видео-лекция). Чтение такой лекции сводится к развернутому или краткому комментированию просматриваемых визуальных материалов.

Лучше использовать разные виды наглядности – натуральной, изобра- зительной, символической. При переходе от текста к зрительной форме или от одного вида наглядности к другому теряется некоторое количество ин- формации. Однако это может быть преимуществом, поскольку позволяет сконцентрировать внимание на наиболее важных аспектах и особенностях содержания лекции, способствовать его пониманию и усвоению.

# 2 Практические занятия (семинары)

Практические занятия являются важной частью учебного процесса в вузе. Они проводятся с целью закрепления лекционного материала, овладе- ния понятийным аппаратом предмета, методами и приёмами исследования, изучаемыми в рамках учебной дисциплины. Главной целью такого рода заня- тий является научиться применению теоретических знаний на практике.

Содержание практических занятий по дисциплине «Линейная алгебра» представлено в таблице.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Не-** | **Наименование раздела** | **Содержание** |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **деля** | **/темы дисциплины** |  |
| 1-4. | **Матрицы, определители и системы линейных уравнений** | |
| 1-2. | Матрицы и определители | Действия с матрицами. Определитель матрицы.  Обратная матрица, ранг матрицы. Матричные уравнения. |
| 3-4 | Системы линейных уравнений | Системы линейных уравнений. Формулы Крамера. Метод  Гаусса. Фундаментальная система решений однородной сис- темы линейных уравнений. Структура решений неоднород- ной системы |
| 5-9. | **Линейные пространства и подпространства, базис, координаты, линейные опера- торы** | |
| 5-7 | Линейные пространства, размерность | Линейные пространства. Размерность. Базис. Координаты  вектора в базисе. Изменение координат вектора при перехо- де к новому базису. Линейная оболочка векторов. Примене- ние ранга матрицы к исследованию линейной зависимости векторов и нахождению размерности подпространства. Раз- мерность и базис суммы и пересечения подпространств. |
| 7-9 | Операторы | Линейный оператор. Матричная запись и матрица операто- ра. Изменение матрицы оператора при переходе к новому  базису. Действия над операторами. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду, базис из собственных векторов. |
| 10-13. | **Евклидовы пространства** | |
| 10-11 | Евклидовы пространства | Пространства со скалярным произведением. Ортогонализа- ция. Ортогональное дополнение, ортогональная составляю- щая. Измерение длин и углов. Матрица Грама. |
| 12-13 | Операторы самосопря-  женный и ортогональный | Сопряженный, самосопряженный и ортогональный операто- ры. Приведение самосопряженного оператора к диагональ- ному виду в ортонормированном базисе. |
| 4. | **Квадратичные формы** | |
| 14-16 | Приведение формы к ка- ноническому виду | Квадратичные формы. Приведение к каноническому (нор- мальному виду). Исследование знакоопределенности. При- ведение уравнений кривых и поверхностей 2 порядка к ка- ноническому виду. |

Практические занятия — метод обучения, обеспечивающий связь тео- рии и практики, содействующий выработке у студентов умений и навыков применения знаний, полученных на лекции и в ходе самостоятельной работы.

Практические занятия представляют собой занятия по решению раз- личных прикладных задач, образцы которых были даны на лекциях. В итоге у каждого обучающегося должен быть выработан определенный профессио- нальный подход к решению каждой задачи.

Практические занятия по курсу могут проводиться в различных фор- мах. Рекомендуются активные формы занятий, такие как дискуссия, деловая игра, тренинг. Преподавателю важно давать задания в соответствии с воз- можностями обучающихся на данной стадии обучения, чтобы обеспечить им уверенность в своих силах.

Практическое занятие должно опираться на известный теоретический материал, который изложен или на который дана соответствующая ссылка в лекции.

Практическое занятие должно быть нацеленным на формирование оп- ределенных умений и закрепления определенных навыков, поэтому цель за- нятия должна быть заранее известна и понятна преподавателю и обучаю- щимся. Лучше иметь сформулированные в письменном виде цель, задачи, содержание и последовательность занятия, ожидаемый результат.

Одно или несколько занятий желательно провести в компьютерном классе с доступом в глобальную сеть. Целью такого занятия может быть по- мощь в организации выполнения заданий самостоятельной работы, которые ориентированы на поиск информации в Интернет.

Обучающиеся должны всегда видеть ведущую идею курса и ее связь с практикой. Это придает учебной работе актуальность, утверждает необходи- мость овладения опытом профессиональной деятельности, связывает её с практикой жизни. В таких условиях задача преподавателя состоит в том, что- бы больше показывать обучающимся практическую значимость ведущих на- учных идей и принципиальных научных концепций и положений.

Примерные цели практических занятий:

1. помочь обучающимся систематизировать, закрепить и углубить зна- ния теоретического характера;
2. научить студентов приемам решения практических задач, способст- вовать овладению навыками;
3. формировать умение учиться самостоятельно, т.е. овладевать мето- дами, способами и приемами самообучения, саморазвития и самоконтроля.

Содержание практических занятий и методика их проведения должны обеспечивать развитие творческой активности личности. Они развивают на- учное мышление и речь обучающихся, позволяют проверить их знания, вы- ступают важным средством оперативной обратной связи. Поэтому практиче- ские занятия должны выполнять не только познавательную и воспитатель- ную функции, но и способствовать росту их креативности.

Практические занятия проводятся в двух формах: выполняются инди- видуально и в групповой форме. При разработке практических занятий должна быть учтена форма их проведения и возможности интерактивного обучения. Групповая форма предполагает обсуждение слушателями конкрет- ной проблемы в группе по каждому этапу изучения дисциплины.

Прежде чем приступить к изучению темы, необходимо прокомменти- ровать основные вопросы плана лекции. Такой подход преподавателя помо- гает студентам быстро находить нужный материал к каждому из вопросов, не задерживаясь на второстепенном.

Важно развивать у студентов умение сопоставлять источники, проду- мывать изучаемый материал.

Большое значение имеет совершенствование навыков конспектирова- ния у студентов.

Преподаватель может рекомендовать студентам следующие основные формы записи: план (простой и развернутый), выписки, тезисы.

Преподаватель может предложить студентам подумать над постанов- кой таких вопросов по теме лекции, которые вызовут интерес своей неодно- значностью, противоречивостью, разделят участников семинара на оппони- рующие группы. А это как раз то, что нужно для дискуссии, для активизации, для поиска студентами истины, которая, как известно, рождается в споре. Само собой разумеется, что и в арсенале преподавателя должны быть заго- товлены вопросы для создания проблемных ситуаций, если они не будут соз- даны выступлениями студентов.

В процессе подготовки, прорабатывая предложенные вопросы, студент определяет для себя один-два из них (можно, конечно и больше), в которых он чувствует себя наиболее уверенно и в качестве консультанта или оппо- нента намерен задать тон на семинаре.

Практические занятия предполагают не просто обсуждение студентами учебного материала, а выполнение ими определенных практических заданий. Систему таких заданий часто называют практикумом.

Функции практических занятий:

1. закрепление теоретических знаний на практике;
2. усвоение умений исследовательской работы;
3. усвоение умений практической работы;
4. применение теоретических знаний для решения практических задач;
5. самопознание;
6. саморазвитие.

Соответствующие задачи ставятся преподавателем при планировании каждой работы. Те или иные функции могут выдвигаться на первый план в зависимости от того, в рамках каких образовательных программ проводятся занятия.

Практическое занятие (семинар) – один из наиболее сложных и в то же время плодотворных видов (форм) вузовского обучения и воспитания. В ус- ловиях высшей школы семинар – один из видов практических занятий, про- водимых под руководством преподавателя.

Целью практических занятий (семинаров) является:

1. закрепление методов анализа;
2. проверка уровня понимания студентами вопросов, рассмотренных на лекциях и по учебной литературе, степени и качества усвоения материала студентами;
3. обучение навыкам решения поставленных задач и умение подобрать необходимый метод решения;
4. восполнение пробелов в пройденной теоретической части курса и оказание помощи в его усвоении.

При условии соблюдения требований методики их проведения семина- ры выполняют многогранную роль:

1. стимулируют регулярное изучение студентами первоисточников и другой литературы, а также внимательное отношение к лекционному курсу;
2. закрепляют знания, полученные студентами при прослушивании лекции и самостоятельной работе над литературой;
3. расширяют круг знаний благодаря выступлениям товарищей и пре- подавателя на занятии;
4. позволяют студентам проверить правильность ранее полученных знаний, вычленить в них наиболее важное, существенное;
5. способствуют превращению знаний в твердые личные убеждения, рассеивают сомнения, которые могли возникнуть на лекциях и при изучении литературы, что особенно хорошо достигается в результате столкновения мнений, дискуссии;
6. прививают навыки самостоятельного мышления, устного выступле- ния по теоретическим вопросам, оттачивают мысль, приучают студентов свободно оперировать терминологией, экономическими понятиями и катего- риями;
7. предоставляют возможность преподавателю систематически контро- лировать уровень самостоятельной работы студентов над первоисточниками, другим учебным материалом, степень их внимательности на лекциях;
8. позволяют изучить мнения, интересы студентов, служат средством контроля преподавателя не только за работой студентов, но и за своей собст- венной как лектора и руководителя семинара, консультанта и т. д.

При разработке методики семинарских занятий важное место занимает вопрос о взаимосвязи между семинаром и лекцией, семинаром и самостоя- тельной работой студентов, о характере и способах такой взаимосвязи. Се- минар не должен повторять лекцию, и, вместе с тем, его руководителю необ- ходимо сохранить связь принципиальных положений лекции с содержанием семинарского занятия.

При подготовке к семинару студентами осуществляется весьма объем- ная работа по углубленному проникновению в суть вынесенной для обсуж- дения проблемы. В ходе семинара студент учится публично выступать, ви- деть реакцию слушателей, логично, ясно, четко, грамотным литературным языком излагать свои мысли, проводить доводы, формулировать аргументы в защиту своей позиции.

На семинаре каждый студент имеет возможность критически оценить свои знания, сравнить со знаниями и умениями их излагать других студентов, сделать выводы о необходимости более углубленной и ответственной работы над обсуждаемыми проблемами.

В ходе семинара каждый студент опирается на свои конспекты, сде- ланные на лекции, собственные выписки из учебников, первоисточников, статей, другой специальной литературы, на словарь по данной теме. Семинар стимулирует стремление к совершенствованию конспекта, желание сделать его более информативным, качественным.

От семинара к семинару, на всех его этапах и их коррекции студент поднимается на более высокую ступеньку собственной зрелости, своего мне- ния более эффективно работать над проблемами, непосредственно относя- щимися к его будущей профессии.

Семинар – эффективная форма закрепления полученных по обсуждае- мой проблеме знаний, видения этой проблемы в целом, осознания ее соотне- сенности с другими темами в рамках целостной концепции.

С точки зрения методики проведения семинар представляет собой ком- бинированную, интегративную форму учебного занятия. Он предполагает возможность использования рефератов, фрагментов первоисточников, уст- ных и письменных понятийных диктантов, тестов, заданий типа «закончите предложение» и др.

Для стимулирования самостоятельного мышления на занятиях исполь- зуются различные активные методы обучения: проблемные ситуации, игры, педагогические задачи, тесты, интерактивный опрос.

В практике семинарских занятий используется следующий ряд форм: развернутая беседа, семинар-диспут, комментированное чтение, упражнения на самостоятельность мышления, письменная (контрольная) работа, семинар- коллоквиум и другие.

1. Развернутая беседа – наиболее распространенная форма семинарских занятий. Она предполагает подготовку всех студентов по каждому вопросу плана занятия с единым для всех перечнем рекомендуемой обязательной и дополнительной литературы; выступления студентов (по их желанию или по вызову преподавателя) и их обсуждение; вступление и заключение препода- вателя. Развернутая беседа позволяет вовлечь в обсуждение изучаемой про- блематики наибольшее число студентов, разумеется, при использовании всех средств их активизации: постановки хорошо продуманных, четко сформули- рованных дополнительных вопросов к выступающему и всей группе, умелой концентрации внимания студентов на сильных и слабых сторонах выступле- ний студентов, своевременном акцентировании внимания и интереса студен- тов на новых моментах, вскрывающихся в процессе работы и т. д.

Развернутая беседа не исключает, а предполагает и заранее запланиро- ванные выступления отдельных студентов по некоторым дополнительным вопросам. Но подобные сообщения выступают здесь в качестве не основы для обсуждения, а лишь дополнения к уже состоявшимся выступлениям.

1. Семинар-диспут имеет ряд достоинств. Кроме других задач, обычно реализуемых на семинаре, эта форма наиболее удобна для выработки у сту- дентов навыков полемиста. Диспут может быть и самостоятельной формой семинара, и элементом других форм практических занятий. В первом случае наиболее интересно проходят такие занятия при объединении двух или не- скольких семинарских групп, когда с докладами выступают студенты одной группы, а оппонентами – другой, о чем договариваются заранее. Вопросы, выносимые на подобные семинары, должны всегда иметь теоретическую и практическую значимость.

Диспут как элемент обычного семинара может быть вызван преподава-

телем в ходе занятия или же заранее планируется им. Полемика возникает подчас и стихийно. В ходе полемики студенты формируют у себя находчи- вость, быстроту мыслительной реакции и, главное, отстаиваемое в споре ми- ровоззрение складывается у них как глубоко личное.

1. Комментированное чтение первоисточников на семинаре преследует цель содействовать более осмысленной и тщательной работе студентов над рекомендуемой специальной литературой. Чаще всего оно составляет лишь элемент обычного семинара в виде развернутой беседы и длится всего 15-20 минут. Комментированное чтение позволяет приучать студентов лучше раз- бираться в специальных источниках. Комментирование может быть выделе- но в качестве самостоятельного пункта плана семинара.
2. Упражнения на самостоятельность мышления обычно входят в каче- стве одного из элементов семинарского занятия. Преподаватель подбирает задания, практические задачи, мини-кейсы, выполнение и решение которых требует от студентов самостоятельной мыслительной активности, проявле- ние способности применять полученные знания в конкретной практико- ориентированной ситуации. Решение задач на самостоятельность мышления содействует формированию у студентов способности более глубоко вникать в профессиональные проблемы.
3. Контрольные (письменные) работы / тесты также практикуются на семинарах. На них может быть отведено от 15 минут до целой пары. Тема работы может быть сообщена студентам заранее, а иногда и без предупреж- дения по одному из пунктов плана текущего семинара. Такая работа носит характер фронтальной проверки знаний всех студентов по определенному разделу курса. Содержание работ анализируется преподавателем на очеред- ном занятии, что вызывает всегда обостренный интерес студентов и активи- зирует их последующую подготовку к семинарским занятиям. Если на кон- трольную работу отводится 15-45 минут, то после ее написания работа семи- нара продолжается обычным порядком. В течение семинарского курса целе- сообразно провести несколько контрольных работ различных типов.
4. Коллоквиумы-собеседования преподавателя со студентами прово- дятся в конце изучаемого курса с целью выяснения знаний по обобщенным темам дисциплины, их углубленного изучения.

В целях эффективности семинарских занятий необходима обстоятель- ная подготовка к их проведению как со стороны преподавателей, так и обу- чающихся. Преподаватель в начале семестра (учебного года) должен обеспе- чить обучающихся методическими материалами для своевременной подго- товки их к активным формам занятий, в том числе и к семинарам. Во время лекций, связанных с темой семинарского занятия, следует обратить внимание обучающихся на то, что необходимо дополнительно изучить при подготовке к семинару (новые официальные документы, статьи в периодических журна- лах, вновь вышедшие монографии и т. д.).

Планы семинарских занятий, их тематика, рекомендуемая литература, цель и задачи ее изучения сообщаются преподавателем на вводных занятиях или в методических указаниях по данной дисциплине.

Начиная подготовку к семинарскому занятию, необходимо, прежде всего, указать студентам страницы в конспекте лекций, разделы учебников и учебных пособий, чтобы они получили общее представление о месте и значении темы в изучаемом курсе. Затем следует рекомендовать им поработать с дополнитель- ной литературой, сделать записи по рекомендованным источникам.

Записи имеют первостепенное значение для самостоятельной работы студентов. Они помогают понять построение изучаемой книги, выделить ос- новные положения, проследить их логику и тем самым проникнуть в творче- скую лабораторию автора.

Ведение записей способствует превращению чтения в активный про- цесс, мобилизует, наряду со зрительной, и моторную память. Следует пом- нить: у студента, систематически ведущего записи, создается свой индивиду- альный фонд подсобных материалов для быстрого повторения прочитанного, для мобилизации накопленных знаний. Особенно важны и полезны записи тогда, когда в них находят отражение мысли, возникшие при самостоятель- ной работе.

Нередко среди начинающих преподавателей можно встретить людей, полагающих, будто записи – дело простое, требующее, в основном, усилий рук, а не головы. Это сугубо ошибочное представление. Полноценные записи отражают не только содержание прочитанного, но и результат мыслительной деятельности студента.

Важно развивать у студентов умение сопоставлять источники, проду- мывать изучаемый материал. Поэтому написание конспектов по рассматри- ваемым вопросам является обязательным элементом подготовки студентов к аудиторным занятиям.

Желательно, чтобы на занятии студент излагал материал свободно.

Прикованность к конспекту объясняется обычно следующими причинами:

а) плохо продумана структура изложения, вопрос не осмыслен во всей его полноте, студент боится потерять нить мыслей, нарушить логическую последовательность высказываемых положений, скомкать выступление;

б) недостаточно развита культура устной речи, опасение говорить «ко- ряво» и неубедительно;

в) материал списан из учебных пособий механически, без достаточного осмысливания его;

г) как исключение, материал списан у товарища или же используется чужой конспект.

Любая из перечисленных причин, за исключением второй, говорит о по- верхностной или же просто недобросовестной подготовке студента к занятию. Важно научить студентов во время выступления поддерживать посто- янную – связь с аудиторией, быстро, не теряясь, реагировать на реплики, во- просы, замечания, что дается обычно не сразу, требует постоянной работы над собой. Выступающий обращается к аудитории, а не к преподавателю, как школьник на уроке. Контакт со слушателями – товарищами по группе – по- могает студенту лучше выразить свою мысль, реакция аудитории позволит ему почувствовать сильные и слабые стороны своего выступления. Без «об-

ратной связи» со слушателями выступление студента – это разговор с самим собой, обращение в пустоту; ему одиноко и неуютно за кафедрой, поэтому на семинаре неплохо ввести в традицию анализ не только содержания выступ- лений, но и их формы – речи, дикции, поведения за кафедрой, характера об- щения с аудиторией.

Перечень образовательных технологий, используемых при осуществ- лении образовательного процесса по дисциплине «Линейная алгебра», пред- ставлен в таблице.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **№ пп** | **Наименование темы дисциплины** | **Вид занятий (лекция, практические**  **занятия)** | **Количество ак. ч.** | **Наименование активных и инте- рактивных форм проведения за- нятий** |
| 1. | Тема 1.  Матрицы и определи- тели | лекция | 2 | Интерактивная лекция |
| практические занятия | 4 | Устный опрос  Решение заданий у доски и инди- видуально. Выполнение и защита ИДЗ. Контрольная работа |
| 2. | Тема 2.  Системы линейных уравнений | лекция | 2 | Интерактивная лекция |
| практические занятия | 4 | Устный опрос  Решение заданий у доски и инди- видуально. Выполнение и защита ИДЗ. Контрольная работа |
| 3. | Тема 3. Линейные про- странства | лекция | 3 | Интерактивная лекция |
| практические занятия | 6 | Устный опрос  Решение заданий у доски и инди- видуально. Выполнение и защита ИДЗ.  Контрольная работа |
| 4. | Тема 4. Операторы | лекция | 3 | Интерактивная лекция |
| практические занятия | 6 | Устный опрос  Решение заданий у доски и инди- видуально. Выполнение и защита ИДЗ. Контрольная работа |
| 5. | Тема 5. Евклидовы пространства | лекция | 2 | Интерактивная лекция |
| практические занятия | 4 | Устный опрос  Решение заданий у доски и инди-  видуально. Выполнение и защита ИДЗ. Контрольная работа |
| 6. | Тема 6. Операторы в евклидовых простран- ствах | лекция | 2 | Интерактивная лекция |
| практические занятия | 4 | Устный опрос  Решение заданий у доски и инди- видуально.  Выполнение и защита ИДЗ. Контрольная работа |
| 7. | Тема 7. Квадратичные формы | лекция | 2 | Интерактивная лекция |
| практические занятия | 4 | Устный опрос  Решение заданий у доски и инди- видуально.  Выполнение и защита ИДЗ. |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **№ пп** | **Наименование темы дисциплины** | **Вид занятий (лекция,**  **практические занятия)** | **Количество ак. ч.** | **Наименование активных и инте- рактивных форм проведения за- нятий** |
|  |  | Контрольная работа |

В целях реализации индивидуального подхода к обучению студентов, осуществляющих учебный процесс по собственной траектории в рамках ин- дивидуального рабочего плана, изучение данной дисциплины базируется на следующих возможностях: обеспечение внеаудиторной работы со студента- ми в том числе в электронной образовательной среде с использованием соот- ветствующего программного оборудования, дистанционных форм обучения, возможностей Интернет-ресурсов, индивидуальных консультаций и т.д.

# 3 Оценочные средства по дисциплине

Оценочные средства по дисциплине обеспечивают проверку освоения планируемых результатов обучения посредством мероприятий текущей и промежуточной аттестации.

# Экзамен

**а) пример билета**

**ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 01**

1. Матрицы, действия с матрицами (сложение матриц, умножение на число, умножение матриц, транспонирование). Определители квадратных матриц порядка n.
2. Ядро и образ линейного оператора. Теорема о размерности ядра и образа линейного оператора.
3. Исследовать кривую второго порядка и построить ее.

*x*2  *y*2  4*xy*  2*x*  4 *y*  1  0.

1 1 1

 

1 1 1

1 1 1

1. Найти собственные значения и собственные векторы оператора   .

Составитель Н.Э. Клиншпонт

(подпись)

Заведующий кафедрой/

начальник отделения В.К. Артемьев

(подпись)

« » 20 г.

***б) типовые вопросы:***

1. Матрицы, действия с матрицами (сложение матриц, умножение на число, умножение матриц, транспонирование).
2. Определители квадратных матриц порядка n. Определение по индукции через разло- жение по первой строке.
3. Минор, алгебраическое дополнение. Теорема о разложении определителя по элемен- там ряда (без доказательства).
4. Перестановки, инверсии, четность, нечетность перестановки. Определение определи- теля матрицы размера n через перестановки и инверсии.
5. Свойства определителей. Перестановка строк, транспонирование, линейное свойство. Следствия из свойств. Определители треугольной матрицы, блочной матрицы.
6. Следствие из теоремы о разложении определителя (фальшивое разложение).
7. Обратная матрица. Теорема об обратной матрице.
8. Правило Крамера решения системы линейных алгебраических уравнений (теорема).
9. Ранг матрицы. Базисный минор. Сохранение ранга при элементарных преобразовани- ях. Линейная зависимость и независимость строк матрицы. Теорема о базисном мино- ре (без доказательства). Второе определение ранга матрицы (ранг – максимальное ко- личество линейно независимых строк (столбцов) в матрице).
10. Классификация систем линейных алгебраических уравнений – совместные, несовме- стные, определенные, неопределенные. Теорема Кронекера – Капелли. Исследование и решение неоднородных и однородных систем. Метод Гаусса.
11. Ф.С.Р. однородной системы. Структура общего решения неоднородных систем.
12. Линейные пространства. Примеры. Линейная зависимость и независимость векторов линейного пространства.
13. Базис. Размерность. Изоморфизм пространств. Теорема об изоморфности пространств одинаковой размерности над одним числовым полем (без доказательства).
14. Координаты вектора в данном базисе. Действия с координатами. Преобразование ко- ординат при переходе к новому базису.
15. Подпространства линейного пространства. Линейная оболочка векторов. Размерность подпространства. Теорема о размерности линейной оболочки.
16. Пересечение и сумма подпространств. Теорема о размерности суммы и пересечения двух подпространств.
17. Линейные операторы в линейном пространстве. Матрица оператора. Примеры опера- торов и матриц. Теорема о матричной записи линейного оператора (без доказательст- ва).
18. Действия с операторами (сумма, произведение на число, суперпозиция). Обратный оператор.
19. Ядро и образ линейного оператора. Теорема о размерности ядра и образа линейного оператора.
20. Преобразование матрицы оператора при переходе к новому базису.
21. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Линейная неза- висимость собственных векторов, соответствующих разным собственным значениям. Характеристический многочлен, его инвариантность.
22. Достаточное условие приводимости матрицы оператора к диагональному виду (две теоремы, одна без доказательства).
23. Евклидовы пространства. Определение. Примеры. Неравенство Коши-Буняковского. Норма элемента. Неравенство треугольника. Угол между элементами.
24. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Ортонормированный базис.
25. Матрица Грама ёё применение к вычислению объема n-мерного параллелепипеда (без доказательства).
26. Ортогональное дополнение. Разложение евклидова пространства *L* в прямую сумму

любого его подпространства

*L*1  *L*

и ортогонального дополнения к

*L*1 (без доказа-

тельства). Ортогональная проекция и ортогональная составляющая вектора относи- тельно подпространства. Угол между вектором и подпространством.

1. Сопряженный оператор. Матрица сопряженного оператора в ортонормированном ба- зисе (без доказательства).
2. Самосопряженный оператор. Основные свойства: вещественность собственных зна- чений, ортогональность собственных векторов, соответствующих разным собствен- ным значениям, существование ортонормированного базиса из собственных векторов (последнее без доказательства).
3. Ортогональный оператор. Сохранение длин и углов, геометрический смысл. Ортого- нальная матрица и её свойства. Ортогональный оператор в 2-мерном случае и теорема об общем виде ортогонального оператора (без доказательства).
4. Квадратичные формы. Изменение матрицы формы при замене базиса.
5. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа.
6. Нормальный вид квадратичной формы. Закон инерции квадратичных форм (без дока- зательства).
7. Теорема о приведение квадратичной формы к каноническому виду с помощью орто- гонального преобразования.
8. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра (без доказательства).

## в) критерии и шкала оценивания компетенций (результатов):

Билет содержит два теоретический вопроса и две задачи.

По результатам выполнения зачетной работы оценивается уровень ос- воения обучающимся материала, предусмотренного учебной программой, уровень владения профессиональными терминами, умение обучающегося использовать теоретические знания при решении практических задач.

Экзамен считается сданным, если итоговый результат за выполненные задания составляет от 24 до 40 баллов. По каждому из 4-х заданий выставля- ется от 0 до 10 баллов.

|  |  |
| --- | --- |
| **Оценка** | **Критерии оценки** |
| Отлично 36-40 | Студент должен:   * продемонстрировать глубокое и прочное усвоение знаний про- граммного материала; * исчерпывающе, последовательно, грамотно и логически стройно изложить теоретический материал; * правильно формулировать определения; * продемонстрировать умения самостоятельной работы с литера- турой; * уметь сделать выводы по излагаемому материалу. |
| Хорошо 30-35 | Студент должен:   * продемонстрировать достаточно полное знание программного материала; * продемонстрировать знание основных теоретических понятий;   достаточно последовательно, грамотно и логически стройно изла- |

|  |  |
| --- | --- |
|  | гать материал;   * продемонстрировать умение ориентироваться в литературе; * уметь сделать достаточно обоснованные выводы по излагаемому материалу. |
| Удовлетворительно 24-29 | Студент должен:   * продемонстрировать общее знание изучаемого материала; * показать общее владение понятийным аппаратом дисциплины; * уметь строить ответ в соответствии со структурой излагаемого вопроса; * знать основную рекомендуемую программой учебную литерату- ру. |
| Неудовлетворительно 23 и меньше | Студент демонстрирует:   * незнание значительной части программного материала; * не владение понятийным аппаратом дисциплины; * существенные ошибки при изложении учебного материала; * неумение строить ответ в соответствии со структурой излагаемо- го вопроса; * неумение делать выводы по излагаемому материалу. |

1. **Контрольные работы**

***а) примеры тестовых заданий:***

# Задание для контрольной работы 1

1. Образует ли линейное пространство всех положительных чисел, в котором сумма лю- бых двух элементов 𝑎 и *b* задается как *a*  *b* ; а произведение любого элемента 𝑎 на любое число 𝛾 есть 𝑎𝛾?
2. Найти координаты вектора

*х*  (7,5,2) в базисе *e*' ,*e*' ,*e*' , если он задан в базисе

*e*1, *e*2, *e*3 и *e*1  *e*1  *e*3, *e*2

1 2 3

 *e*1  *e*2 , *e*3  *e*1  *e*2  *e*3 .

1. Решить матричное уравнение

*Х*  2 1  3 5

 

 3 4

 

5 0

1. Найти общее решение неоднородной системы, построить Ф.С.Р. однородной системы

2*x*1  2*x*2  3*x*3  *x*4  1 2*x*1  2*x*2  3*x*3  *x*4  0

*x*  *x*

 *x*  1

*x*  *x*  *x*  0

 1 2 3  1 2 3

3*x*1  *x*2  4*x*3  *x*4  2 3*x*  *x*  4*x*  *x*  0



 1 2 3 4

1. Исследовать на линейную зависимость систему векторов *ex* , *e**x* , *e*2*x*

на ( ,) .

***б) критерии и шкала оценивания компетенций (результатов)*** Контрольная работа считается выполненной, если правильно решены как минимум 3 задачи (получено 18 баллов и выше).

Все решенные задания в каждом варианте суммарно оцениваются 30 балла- ми: каждое из заданий оценивается в 6 баллов.

|  |  |
| --- | --- |
| **Оценка** | **Критерии оценки** |
| Отлично  с 27 до30 баллов | Сумма баллов решенных задач |

|  |  |
| --- | --- |
| Хорошо  с 23 до 26 баллов | Сумма баллов решенных задач |
| Удовлетворительно  с 18 до 22 баллов | Сумма баллов решенных задач |
| Неудовлетворительно  с 0 до 17 баллов | Сумма баллов решенных задач |

***в) примеры тестовых заданий:***

# Задание для контрольной работы 2

→ →

1. Найти матрицу (в базисе (*i* , *j* , *k* ) ), образ и ядро оператора зеркального отражения от-

носительно плоскости

*x*  *y*  *z*  0 .

1. Найти матрицу в базисе *e*1,

*e*2 ,

*e*3  , где *e*1  *~~e~~*1  *e*2  *e*3 , *e*2  *~~e~~*1  *e*2  2*e*3 ,

*e*  *~~e~~*  2*e*  *e* , если она задана в базисе *e* , *e* , *e*

 1 0 2 

3 1 2 3

1 2 3

 3 1 0 .

 

1 1 2 

 

1. Найти собственные векторы и собственные значения  4

2 1

 1 3 1.

 

 1 2 2 

 

Приводится ли матрица к диагональному виду? Если да, то найти диагональный вид и диагонализирующую матрицу.

1. Привести квадратичную форму к каноническому виду с помощью метода Лагранжа

4*x*2  8*x x*  4*x x*  3*x*2  4*x*2.

1 1 2 1 3 2 3

1. Исследовать кривую второго порядка и построить ее.

3*x*2  3*y*2  2*xy* 12*x*  4 *y* 1  0.

## г) критерии и шкала оценивания компетенций (результатов)

Контрольная работа считается выполненной, если правильно решены как минимум 3 задачи (получено 18 баллов и выше).

Все решенные задания в каждом варианте суммарно оцениваются 30 балла- ми: каждое из заданий оценивается в 6 баллов.

|  |  |
| --- | --- |
| **Оценка** | **Критерии оценки** |
| Отлично  с 27 до30 баллов | Сумма баллов решенных задач |
| Хорошо  с 23 до 26 баллов | Сумма баллов решенных задач |
| Удовлетворительно  с 18 до 22 баллов | Сумма баллов решенных задач |
| Неудовлетворительно  с 0 до 17 баллов | Сумма баллов решенных задач |

# 4 Итоговая аттестация по дисциплине

Итоговая аттестация по дисциплине является интегральным показателем ка- чества теоретических и практических знаний и навыков обучающихся по дисциплине и складывается из оценок, полученных в ходе текущей и проме- жуточной аттестации.

Текущая аттестация в семестре проводится с целью обеспечения своевремен- ной обратной связи, для коррекции обучения, активизации самостоятельной работы обучающихся.

Промежуточная аттестация предназначена для объективного подтверждения и оценивания достигнутых результатов обучения после завершения изучения дисциплины.

Текущая аттестация осуществляется два раза в семестр:

* контрольная точка № 1 (КТ № 1) – выставляется в электронную ведо- мость не позднее 8 недели учебного семестра. Включает в себя оценку мероприятий текущего контроля аудиторной и самостоятельной рабо- ты обучающегося по разделам/темам учебной дисциплины с 1 по 8 не- делю учебного семестра.
* контрольная точка № 2 (КТ № 2) – выставляется в электронную ведо- мость не позднее 16 недели учебного семестра. Включает в себя оценку мероприятий текущего контроля аудиторной и самостоятельной рабо- ты обучающегося по разделам/темам учебной дисциплины с 9 по 16 неделю учебного семестра.

Результаты текущей и промежуточной аттестации подводятся по шкале балльно-рейтинговой системы.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Этап рейтинговой систе- мы /**  **Оценочное средство** | **Неделя** | **Балл** | |
| Минимум\* | Максимум\*\* |
| **Текущая аттестация** | **1-16** | **36 - 60% от мак- симума** | **60** |
| **Контрольная точка № 1** | **8** | **18 (60% от 30)** | **30** |
| Рейтинговая контрольная  работа № 1 | 8 | 18 | 30 |
| **Контрольная точка № 2** | **15-16** | **18 (60% от 30)** | **30** |
| Рейтинговая контрольная  работа № 2 | 15 | 18 | 30 |
| **Промежуточная аттеста- ция** | **-** | **24 (60% от 40)** | **40** |
| Экзамен | - |  |  |
| Экзаменационный билет | - | 24 | 40 |
| **ИТОГО по дисциплине** |  | **60** | **100** |

\* - Минимальное количество баллов за оценочное средство – это количество баллов, на- бранное обучающимся, при котором оценочное средство засчитывается, в противном слу- чае обучающийся должен ликвидировать появившуюся академическую задолженность по

текущей или промежуточной аттестации. Минимальное количество баллов за текущую аттестацию, в т.ч. отдельное оценочное средство в ее составе, и промежуточную аттеста- цию составляет 60% от соответствующих максимальных баллов.

Процедура оценивания знаний, умений, владений по дисциплине включает учет успешности по всем видам заявленных оценочных средств.

На каждом практическом занятии выполняются задания по пройден- ным темам согласно рабочему плану изучения дисциплины. Применяется групповое оценивание ответа или оценивание преподавателем.

По окончании освоения дисциплины проводится промежуточная атте- стация в виде экзамена, что позволяет оценить совокупность приобретенных в процессе обучения компетенций. При выставлении итоговой оценки при- меняется балльно-рейтинговая система оценки результатов обучения.

Экзамен предназначен для оценки работы обучающегося в течение все- го срока изучения дисциплины и призван выявить уровень, прочность и сис- тематичность полученных обучающимся теоретических знаний и умений применять их в решении практических задач, приобретения навыков само- стоятельной работы, развития творческого мышления.

Итоговая аттестация по дисциплине оценивается по 100-балльной шка- ле и представляет сумму баллов, заработанных обучающимся при выполне- нии заданий в рамках текущей и промежуточной аттестации

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Сумма баллов** | **Оценка по 4- х балльной шкале** | **Оцен- ка ECTS** | **Требования к уровню освоения учебной дисциплины** |
| 90-100 | 5- «отлично»/  «зачтено» | А | Оценка «отлично» выставляется обучающе- муся, если он глубоко и прочно усвоил про- граммный материал, исчерпывающе, последо- вательно, четко и логически стройно его изла- гает, умеет тесно увязывать теорию с практи- кой, использует в ответе материал моногра-  фической литературы |
| 85-89 | 4 - «хорошо»/  «зачтено» | В | Оценка «хорошо» выставляется обучающему- ся, если он твёрдо знает материал, грамотно и  по существу излагает его, не допуская суще- ственных неточностей в ответе на вопрос |
| 75-84 | С |
| 70--74 | D |
| 65-69 | 3 - «удовле- творительно»  / «зачтено» | Оценка «удовлетворительно» выставляется обучающемуся, если он имеет знания только основного материала, но не усвоил его дета- лей, допускает неточности, недостаточно пра- вильные формулировки, нарушения логиче-  ской последовательности в изложении про- граммного материала |
| 60-64 | Е |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 0-59 | 2 - «неудовле- творительно»/  «не зачтено» | F | Оценка «неудовлетворительно» выставляется обучающемуся, который не знает значитель- ной части программного материала, допускает существенные ошибки. Как правило, оценка  «неудовлетворительно» ставится обучающим- ся, которые не могут продолжить обучение  без дополнительных занятий по соответст- вующей дисциплине |

**ЛИСТ СОГЛАСОВАНИЯ**

|  |  |
| --- | --- |
| Программа рассмотрена на заседании кафедр высшей математики ИОПП  (протокол № от « » 20 г. | Заведующий/и.о. заведующего кафедры выс- шей математики ИОПП  « » 20 г. В.К. Артемьев  Руководитель ИОПП  « » 20 г. О.А. Попова |
|  |  |
| Программа рассмотрена на заседании отде- ления биотехнологий  (протокол № от « » 2021 г. | Руководитель образовательной программы  03.03.02 Физика  « » 2021 г. Ю.Н. Анохин  Начальник отделения биотехнологий  « » 2021 г. А.А. Котляров |